Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 7

1 – Mostre que para um número complexo genérico z tem-se as seguintes expressões das funções trigométricas inversas:

a) $\arcsin(z) = -i\ \ln(\, \mathrm{i}z \pm \sqrt{1-z^2})$. Sugestão: use $\sin a = z = \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}$ e $a = \arcsin(z)$
b) $\arccos(z) = -i\ \ln(\, z \pm \sqrt{z^2-1})$. Sugestão: use $\sin a = z = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}$ e $a = \arccos(z)$

2- Calcule na forma cartesiana e polar os seguintes números complexos:

a) $\exp(2+i)$
b) $(3+i)^{-1}$
c) $\ln(2-2/i)$
d) $\arcsin(2)$.

3 – Sabendo que $\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$; $\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ e tomando $z = x+iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$, mostre que:

a) $|\sin z|^2 = \sin x^2 + (\sinh y)^2$
b) $|\cos z|^2 = \cos x^2 + (\sinh y)^2$
c) $|\sinh z|^2 = \sinh x^2 + (\sin y)^2$
d) $|\cosh z|^2 = \sinh x^2 + (\cos y)^2$

4 – Resolva as seguintes equações:

a) $z^5 + i = 0$
b) $\frac{1}{1+\exp(z)} = i$

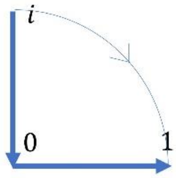
5 – Considere uma função complexa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ de variável complexa $= x+iy$ onde $u, v, x.y \in \mathbb{R}$. As condições de diferenciabilidade de $f(z)$ são as condições de Cauchy-Riemann (CCR): $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Nesse caso a derivada $\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. Uma função diz-se analítica em torno de z_0 se $\frac{df}{dz}$ existir para $|z - z_0| < \delta$ para um certo $\delta > 0$.

a) Encontre a função analítica $f(z)$ tal que $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ e mostre que $f(z) = z^3$.
b) Calcule as derivadas de $f(z)$ de ordem 1,2, 3 e 4 e mostre que o desenvolvimento de Taylor em torno de $z = 0$ de ordem 3 é exato ou seja: $f(z) = f(0) + f'(z) + \frac{f''(0)z^2}{2} + \frac{f'''(0)z^3}{6}$.
c) Calcule a derivada de $f(z) = \sin(z)$ na representação cartesiana e polar. Mostre que as CCR se verificam.

6 – Considere a função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Mostre que $lap(u) = lap(v) = 0$. Desse modo, mostre que o campo 2D $\overrightarrow{F_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y$ é um campo solenoidal (ou de divergência nula) e que o campo $\overrightarrow{F_2} = -\frac{\partial v}{\partial y}\vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial x}\vec{e}_y$ é irrotacional (rotacional nulo).

7- Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em todo o plano complexo e $P(z)$ é a primitiva de $f(z)$, ou seja que verifica $\frac{dP(z)}{dz} = f(z)$, tem-se que o integral $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dP}{dz} dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) = P(z_2) - P(z_1)$.

a) Mostre que $P(z) = \int_0^x \big(u(x',0) + iv(x',0)\big)dx' + \int_0^y \big(-v(x,y') + iu(x,y')\big)dy'$.



b) Mostre que a primitiva de $f(z) = z$ é $P(z) = \frac{z^2}{2}$. Calcule o integral $\int_i^1 z\, dz$ ao longo do percursos indicados na figura (forma direta) e usando a primitiva mostrando a igualdade dos resultados.

8 – As igualdades de Cauchy escrevem-se:

I) Se $f(z)$ analítica no interior de uma curva fechada C, então: $\oint_C f(z)dz = 0$

II) Se $f(z)$ analítica no interior Int(C)de uma curva fechada C e $z_0 \in Int(C)$, então: $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$.

a) Mostre que $\oint_C \frac{f^{(n)}(z)}{z-z_0} dz = n! \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i f^{(n)}(z_0)$.

9 – O desenvolvimento de Laurent é uma generalização do desenvolvimento de Taylor e permite expandir uma função $f(z)$ em torno de um ponto isolado z_0 no qual a função é divergente ou não está definida (e.g. $\frac{1}{z}, sin\left(\frac{1}{z}\right)$ em $z = z_0 = 0$). O desenvolvimento de Laurent é: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ onde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ onde $z_0 \in Int(C)$. Se $a_n \neq 0$ para algum $n \leq -1$, a função é singular em z_0. O coeficiente $a_{-1} = a_{-1}(z_0)$ diz-se o resíduo relativo ao ponto singular z_0.

Se $a_n = 0$ para $n \leq -1$, a função é analítica em $Int(C)$ e a função coincide com o desenvolvimento de Taylor sendo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ com $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

O teorema dos resíduos permite calcular integrais cíclicos ao longo de curvas C no interior das quais pode haver um conjunto de R singularidades isoladas $z_1, z_2, \dots, z_R$. Assim mostra-se que:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{R} a_{-1}(z_k)$$

a) Desenvolva os primeiros três termos de Laurent da função $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ em torno da origem.

b) Calcule a parte real e imaginária do integral $\oint_C f(z)dz$ ao longo da curva de raio 1 no plano complexo recorrendo ao Teorema dos resíduos.